概率论简史

徐传胜　(临沂师范学院数学系,山东临沂　276001)

概率论同其他数学分支一样,是在一定的社会条件下,通过人类的社会实践和生产活动发展起来的一种智力积累. 今日的概率论被广泛应用于各个领域,已成为一棵参天大树,枝多叶茂,硕果累累. 正如钟开莱 1974 年所说:“在过去半个世纪中,概率论从一个较小的、孤立的课题发展为一个与数学许多其它分支相互影响、内容宽广而深入的学科. ”概率论发展的每一步都凝结着数学家的心血,正是一代又一代数学家的辛勤努力才有了概率论的今天.

1　栖凤枝稍尚软弱　化龙形状已依稀

人类认识到随机现象的存在是很早的. 从太古时代起,估计各种可能性就一直是人类的一件要事. 早在古希腊哲学家就已经注意到必然性与偶然性问题;我国春秋时期也已有可考词语(辞海);即使提到数学家记事日程上的可考记载,也至少可推到中世纪[1]. 有史记载 15 世纪上半叶,就已有数学家在考虑这类问题了. 如在意大利数学家帕乔利(L. pacioli) 1494 年出版的《算术》一书中就有以下问题:两人进行赌博,规定谁先获胜 6 场谁为胜者. 一次,当甲已获胜 5 场,乙也获胜 2 场时,比赛因故中断. 那么,赌注该如何分配呢?所给答案为将赌注分成 7 份,按 5∶2 分给甲乙两人. 当卡丹(Cardan Jerome,1501—1576) 看到上述问题时,以为所给分法不妥. 他考虑到接下去比赛的几种可能结果,并确定赌注应按 10∶1 来分配(现在看来,其分法也是错误的). 卡丹著有《论赌博》一书,其中提出一些概率计算问题. 如掷两颗骰子出现的点数和的各种可能性等. 此外,卡丹与塔塔利亚(Tartaglia Niccolo,1500—1557) 还考虑了人口统计、保险业等问题. 但是他们的研究工作,对数学家来说,赌博味道太浓了一些,以致数学家们对其嗤之以鼻. 近代自然科学创始人之一——伽利略(Galileo,1564—1642) 解决了以下问题:同时投下三颗骰子,点数和为 9 的情形有 6 种:(1,2,6)、(1,3,5)、(1,4,4)、(2,2,5)、(2,3,4) 和(3,3,3). 点数和为 10 的情形也有 6 种:(1,3,6)、(1,4,5)、(2,2,6)、(2,3,5) (2,4,4) 和(3,3,4),那么出现点数和为 9 与 10 的机会应相同,而经验告知,出现 10 的机会比出现 9 的机会要多,原因何在?伽利略利用列举法得出同时掷三颗骰子出现点数和为 9 的情形有 25 种,而出现点数和为 10 的情形却有 27 种. 可见,已经产生了概率论的某些萌芽.

1654 年 7 月 29 日,法国骑士梅累向数学神童—帕斯卡(pascal,1623—1662) 提出了一个使他苦恼很久的问题:“两个赌徒相约若干局,谁先赢了 S 局则赢. 若一人赢 $a(a<s)$ 局,另一人赢 $b(b<s)$ 局,赌博中止,问赌本应怎么分?”帕斯卡对此思考良久,又将其转给业余数学王子—费马(Fermat,1601—1665). 在数学史上有名的来往信件中,两人取得了一致意见:在被迫停止的赌博中,应当按每个局中人赌赢的数学期望来分配桌面上的赌注. 帕斯卡与费马用各自不同的方法解决这个问题,帕斯卡长于计算,运用数学归纳法,推导出数学内含的规律性,而费马以敏锐的观察力,严格的推理,建立起数学概念.

以 $s=3$, $a=2$, $b=1$ 为例来说明他们的解法. 即谁先胜 3 局,则可得到全部赌注,在甲胜 2 局,乙胜 1 局时,赌局中止了,问怎样分配赌注才算公平合理.

帕斯卡分析认为:甲已胜 2 局,乙也胜 1 局,如再赌一局,则或者甲大获全胜,赢得全部赌金,或者乙胜,则甲与乙胜的局数变成相等,甲、乙应平分赌金. 把这两种情况平均一下,甲应得赌金的 3/4,乙则得赌金的 1/4.

费马认为:由甲已胜 a 局,乙已胜 b 局,要结束这场赌博最多还需要赌 $(s-a)+(s-b)-1$ 局,在这个例子中,最多还需要玩两局,结果有四种等可能的情况:(甲胜,甲胜),(甲胜,乙胜),(乙胜,甲胜),(乙胜,乙胜). 在前面三种情况下,甲赢得全部赌金,仅第四种情况使乙获得全部赌金. 因此甲有权分得赌金的 3/4,而乙应分赌金的 1/4.

帕斯卡在他的著作《论算术三角形》中给出了这一问题的通解:令 $m=s-a$, $n=s-b$,则甲乙两人应得赌金之比为

$$\frac{C_{m+n-1}^{0}+C_{m+n-1}^{1}+\cdots+C_{m+n-1}^{n-1}}{C_{m+m-1}^{0}+C_{m+n+1}^{1}+\cdots+C_{m+n-1}^{m-1}}$$

费马和帕斯卡虽然没有明确定义概率的概念,但是,他们定义了使某赌徒取胜的机遇,也就是赢的情况数与所有可能情况数的比,这实际上就是概率,所以概率的发展被认为是从帕斯卡和费马开始的. 正如对概率论有卓越贡献的法国数学家泊松(poisson,1781—1840),后来所说:"由一位广有交游的人向一位严肃的冉森派所提出的一个关于机会游戏的问题乃是概率演算的起源."

当荷兰数学家惠更斯(C. Huygens,1629—1695)到巴黎的时候,听说帕斯卡与费马在研究概率问题,便也参与进来,并于 1657 年出版了《论赌博中的计算》一书. 书中给出了第一批概率论概念和定理(如加法定理、乘法定理). 关于"数学期望"是这样提出的:"在赌局开始之前. 对每一个赌徒来说就已有了关于结局的一种"期望",如果共有 N 种等可能的结果,其中,n 种结果使他获赌金为 a,其余结果使他获得赌金为 b,则他的期望为 $\frac{na+(N-n)b}{N}$. 在概率论的现代表述中,概率是基本概念,数学期望则是第二级的概念,但在历史上,顺序却相反,先有"期望"概念,而古典概型的概率定义,完全可以从期望概念中导出来. 因此,可以认为概率论从此诞生了.

2　江山代有人才出　各领风骚数百年

莱布尼兹(Leibniz,1646—1716)于 1672—1676 年侨居巴黎时读到帕斯卡概率方面的研究成果,深刻地认识到这门"新逻辑学"的重要性,并且进行了认真的研究.

在帕斯卡与费马通信讨论赌博问题的那一年,雅各·伯努利(Jacob Bernoulli,1654—1705)诞生了. 在 1713 年出版的其遗著《猜度术》中首次提出了后来以"伯努利定理"著称的极限定理:若在一系列独立试验中,事件 A 发生的概率为常数 P,那么对 $\forall \varepsilon > 0$ 以及充分大的试验次数 n,有

$$P\left\{\left|\left(\frac{m}{n}-p\right)\right|<\varepsilon\right\}>1-\eta\ (\eta\ \text{任意小正数}),$$

其中 m 为 n 次试验中事件 A 出现的次数,伯努利定理刻画了大量经观测中呈现的稳定性,作为大数定律的最早形式而在概率论发展史上占有重要地位.

伯努利认为:先前人们对概率概念,多半从主观方面来解释,即说成是一种"期望",这种期望是先验的等可能的假设,是以古典概型为依据的. 这种方法有极大的局限性,也许只在赌博中可用;在更多的场合,由于无法数清所有的可能情况,也无法确定不同情况的可能性彼此间的大小,这种方法就不可行. 他提出,为了处理更大范围的问题,必须选择另一条道路,那就是"后验地去探知我们所无法先验地确定的东西,也就是从大量相关事例的观察结果中去探知它."这样一来,就从主观的"期望"解释转到了客观的"频率"解释. 大数定律可以说明目前的大多数概率应用. 由于有了它,任一种预测的准确程度将随着例数多而提高. 这就是为什么承得一个特殊事件的保险费的收费标准,要高于大量的一般事件的保险费标准的原因.

伯努利之后,棣莫弗(A. De Moivre,1667—1754)于 1733 年和高斯(Gauss,1777—1857)于 1809 年各自独立引进了正态分布;蒲丰(G.L.L Buffon,1707—1778)于 1777 年提出了投针问题的几何概率;泊松于 1837 年陈述了泊松大数定律等. 特别是拉普拉斯(P. S. Laplace,1749—1827) 1812 年出版的《概率的分析理论》以强有力的分析工具处理概率论的基本内容,使以往零散的结果系统化. 拉普拉斯的著作实现了从组合技巧向分析方法的过渡,开辟了概率论发展的新时期. 正是在这部著作中,拉普拉斯给出了概率的古典定义:

事件 A 的概率 $P(A)$ 等于一次试验中有利于事件 A 的可能结果数与该试验中所有可能结果数之比.

藉此拉普拉斯曾以"中立原理"计算出第二天太阳升起的概率为 1/1826214[2]. 值得说明的是,拉普拉斯认为世界是决定性的,偶然性只是出于人们的无知. 如果我们能预知一切情况,以后的发展便可全知. 关于这点拉普拉斯在其《概率论的哲学试验》中说的很明确:"智慧如果能在某一瞬间知道转动着自然的一切力量,知道大自然所有组成部分的相对位置,再者,如果它是如此浩瀚,足以分析这些材料,并能把上到庞大的天体、下至微小的原子的所有运动悉数囊括在一个公式之中,那末,对于它来说,就没有什么东西是不可靠的了,无论是将来或者过去,在它面前都会昭然若揭."按此观点,宇宙的一切发展,早在混沌初开时就完全决定下来,岂不荒唐!

19 世纪后期,极限理论的发展成为概率论研究的中心课题,俄国数学家切比雪夫(П л чебышев,1821—1894)在这方面作出了重要贡献. 他在 1866 年建立了关于独立随机变量序列的大数定律,使伯努利定理和泊松大数定理成为其特例.

切比雪夫还将棣莫弗——拉普拉斯极限定理推广为更一般的中心极限定理. 切比雪夫的成果后又被他的学生马尔可夫(А А марков,1856—1922)发扬光大,推进了 20 世纪概率论发展的进程.

19 世纪末,概率论在统计物理等领域的应用提出了对概率论基本概念与原理进行解释的需要. 另外,科学家们在这一时期发现的一些概率论悖论也揭示出古典概率论中基本概念存在的矛盾与含糊之处,其中最著名的是所谓"贝特朗悖论". 1899 年由法国学者贝特朗(J.Bertrand)提出:在半径为 r 的圆内随机选择弦,计算弦长超过圆内接正三角形边长的概率,根据"随机选择"的不同意义,可以得到不同的答案.

这类悖论说明概率的概念是以某种确定的实验为前提的,这种实验有时由问题本身所明确规定,有时则不然. 因为,贝特朗等悖论的矛头直指概率概念本身,尤其是拉普拉斯的古典概率定义开始受到猛烈批评.

这样,到 19 世纪,无论是概率论的实际应用还是其自身发展,都强烈地要求对概率论的逻辑基础作出更加严格的考察. 鉴此,1900 年夏,38 岁的德国代表希尔伯特(D.Hilbort,1862—1943)在世界数学家大会上提出了建立概率公理系统的问题. 这就是著名的希尔伯特 23 问题之中的第 6 个问题. 这就引导一批数学家投入了这方面的工作.

3　忽如一夜春风来　千树万树梨花开

最早对概率论来严格化进行尝试的,是俄国数学家伯恩斯坦(С Н бернштейн,1880—1968)和奥地利数学家冯·米西斯(R.von Mises,1883—1953). 他们都提出了一些公理来作为概率论的前提,但他们的公理理论都是不完善的.

作为测度论的奠基人,博雷尔(Borel)在 1905 年指出概率论理论如果采用测度论术语来表述将会方便许多,并首先将测度论方法引入概率论重要问题的研究,特别是 1909 年他提出并在特殊情形下解决了随机变量序列 $\zeta_1 \zeta_2, \cdots$,服从强大数定律的条件问题. 博雷尔的工作激起了数学家们沿这一崭新方向的一系列探索,其中尤以原苏联数学家科尔莫戈罗夫(А Н колмогоров,1903—1987)的研究最为卓著.

从 20 世纪 20 年代中期起,科尔莫戈罗夫开始从测度论途径探讨整个概率论理论的严格表述. 1926 年,他推导了弱大数定律成立的主要条件,后又对博雷尔提出的强大数定律问题给出了一般的结果,推广了切比雪夫不等式,提出了科尔莫戈罗夫不等式,创立了可数集马尔可夫链理论,他最著名的工作是 1933 年以德文出版的经典性著作《概率论基础》. 科尔莫戈罗夫是莫斯科函数论学派领导人鲁金(Н Н Лузин,1883—1950)的学生,对实函数论的运用可以说是炉火纯青. 他在这部著作中建立起集合测度与事件概率的类比、积分与数学期望的类比、函数正交性与随机变量独立性的类比……,等等. 这种广泛的类比终于赋予了概率论以演绎数学的特征. 科尔莫戈罗夫的公理系统逐渐获得了数学家们的普遍承认,由于公理化,概率论成为一门严格的演绎科学,取得了与其他数学分支同等的地位.

科尔莫戈罗夫热爱教育事业,经常在大学生和进修生中挑选人才,参加讨论班. 1934 年,他与概率论另一位创始人辛钦(А Я хинчин)共同主持概率论讨论班. 在他们培养的学生中有 6 位成为前苏联科学院院士或通信院士. 1980 年科尔莫戈罗夫获沃尔夫奖.

公理化概率论首先使随机过程的研究获得了新的起点,随机过程作为随时间变化的偶然量的数学模型,是现代概率论研究的重要主题.

莱维(P.Levy)从 1938 年开始创立研究随机过程的新方法,即着眼于轨道性质的概率方法. 1948 年出版的《随机过程与布朗运动》,提出了独立增量过程的一般理论,并以其为基础极大地推进了对作为一类特殊马尔可夫过程的布朗运动的研究. 1939 年维尔(J.Ville)引进"鞅"这个名称,但鞅论的奠基人是美国概率论学派的代表人物杜布(J.L.Doob). 杜布从 1950 年开始对鞅概念进行了系统的研究而使鞅论成为一门独立的分支. 鞅论使随机过程的研究进一步抽象化,不仅丰富了概率论的内容,而且为其他数学分支如调和分析、复变函数、位势理论等提供了有力的工具. 从 1942 年开始,日本数学家伊藤清引进了随机积分与随机微分方程,为一门意义深远的数学新分支——随机分析的创立与发展奠定了基础.

概率论不仅是"数学之树"的一庞大支条,而且还有若干强壮的根(如下表),直接扎在实际应用环境的大地上. "芳草有情皆碍马,好云无处不遮楼". 正如英国的逻辑学家和经济学家杰文斯(Jevons,1835—1882)所说,概率论是"生活真正的领路人,如果没有对概率的某种估计,我们就寸步难行,无所作为."

浅谈新课标理念下 TI 图形计算器与几何整合的探索

吴会勇　(北京市和平街第一中学)

所谓信息技术与数学课程整合,就是通过数学课把信息技术与数学教学有机地结合起来,将信息技术与数学课程的教与学融为一体,将技术作为一种工具,提高教与学的效率,改善教与学的效果.

数学是研究空间形式和数量关系的科学,有了信息,数学知识可以拥有丰富详实的实际背景,数学教育可以创造知识延伸的发展空间.有了技术,数学知识的形成发展过程可以有更多的呈现方式,有助于揭示数学的本质,数学教育的方式可以有更多的选择.因此信息技术是应用于数学教育的认知工具,信息技术与数学课程的整合会使新课标理念下的新教材有更丰富多采的知识内容、更生动活泼的呈现方式.

数学新课程标准中对于几何课程的说明与建议是:立体几何初步的教学重点是帮助学生逐步形成空间想像能力.本部分内容的设计遵循从整体到局部、具体到抽象的原则,教师应提供丰富的实物模型或利用计算机软件呈现的空间几何体,帮助学生认识空间几何体的结构特征,并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构,巩固和提高义务教育阶段有关三视图的学习和理解,帮助学生运用平行投影与中心投影,进一步掌握在平面上表示空间图形的方法和技能.

在平面解析几何初步的教学中,教师应帮助学生经历如下的过程:首先将几何问题代数化,用代数的语言描述几何要素及其关系,进而将几何问题转化为代数问题;处理代数问题;分析代数结果的几何含义,最终解决几何问题.这种思想应贯穿平面解析几何教学的始终,帮助学生不断地体会"数形结合"的思想方法.

正像王长沛教授曾经说过的:……图形计算器最值得注意的特征便是使数学"视觉化",它拥有多种方式使抽象的数学视觉化,而且很容易实现由一种表示到另一种表示的转化.图形计算器内置的卡氏几何与几何画板是交互式几何系统,学生用图形计算器做数学,通过实验认识几何并探索几何图形性质的过程:作图,观察,猜想,动手干预改变图形,让图形中的某些部分动起来,算算线段长,角度,面积,斜率等等.这些特点,使得图形计算器成为数学教育者使用最为广泛的信息技术之一,可以为平面解析几何初步的教与学提供很好的信息技术支持."

- 概率论
  - 随机理论
    - 随机分析
    - 时序分析
    - 过程理论
    - 鞅论
    - 随机微分方程
    - ……
  - 统 计 学
    - 估计方法
    - 抽样分布
    - 检验方法
    - 回归方法
    - ……
  - 应用概率
    - 随机计算方法
    - 博奕论
    - 排队论
    - ……

参考文献

1　高隆昌,胡勋玉著.数学纵横.成都:四川教育出版社,1992,p64

2　李思一,白葆林译.从惊讶到思考.北京:科学技术文献出版社,1982,p64

3　李文林.数学史教程(M).北京:高等教育出版社,2000,8

4　张奠宙.数学史选讲(M).上海:上海科学技术出版社,1998,2

5　Richard A. Epstein. 赌博的理论和统计的逻辑(M). Academic press,1987

6　王梓坤.科学发现纵横谈(M).北京:北京师范大学出版社,1996,6

7　徐传胜.运用实际问题改进概率统计教学[J].数学教育学报,2000,11(4)